代数幾何学シンポジウム記録
1987年度　pp.73-94

Picard群に自明に作用するK3曲面の自己同型

東京電機大学・理工　金銅誠之

§0. はじめに

K3曲面に自己同型として作用する有限群は、Torelli型定理[6]によって、K3曲面上の到る所消えないholomorphic 2-formに自明に作用する部分群とPicard群に自明に作用する部分群のextensionとして記述される。前者の部分群は、Nikulin[3]，向井[5]によって完全に分類されている。

ここでは、後者のPicard群に自明に作用する部分群を問題とする。Nikulin[3]により、この部分群は巡回群となることが、知られており、またVorontsov[10]による円分体との関連した研究がある。本論では、楕円曲面の理論を用いることで、Picard群に自明に作用するK3曲面の分類と、その具体的構成を与えることを目標とする。

§1. K3曲面の自己同型

この節では、K3曲面の自己同型に関する知られている結

果、及び得られた結果を述べる。

<u>定義</u> 2次元コンパクト連結複素多様体 X は次の2条件 (i) $K_X \sim 0$ (K_X : Xの標準束), (ii) $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X)=0$ を満たす時、<u>K3曲面</u>と呼ばれる。

$H^2(X, \mathbb{Z})$ 上には cup 積 $\langle , \rangle$ によって symmetric bilinear form の構造がはいるが、以後、これを <u>lattice</u> と呼ぶ。X の Picard群を S_X で表わすと、条件(ii)より S_X には $(H^2(X,\mathbb{Z}), \langle , \rangle)$ の sublattice の構造がはいる。S_X を <u>algebraic lattice</u> と呼ぶ。また S_X の $\langle , \rangle$ に関する直交補空間を T_X で表わし、<u>transcendental lattice</u> と呼ぶ。Torelli型定理より次が従う：

<u>命題</u>1. X の自己同型群を $\mathrm{Aut}(X)$ と表わすとき、$\mathrm{Aut}(X)$ の $S_X \oplus T_X$ 上への自然な作用によって、$\mathrm{Aut}(X) \hookrightarrow O(S_X) \times O(T_X)$ と見ることができる。但し $O(S_X)$, $O(T_X)$ は、それぞれ cup 積を保つ $\mathbb{Z}$-module S_X, T_X の同型全体より成る群とする。

$\mathrm{Ker}\{\mathrm{Aut}(X) \to O(T_X)\}$ に含まれる自己同型を symplectic automorphism と呼ぶ。有限 symplectic automorphism group は、Abel群の場合、Nikulin [3] が、一般の場合、向井氏 [5] が分類を与えている。

以下、$H_X := \mathrm{Ker}\{\mathrm{Aut}(X) \to O(S_X)\}$ を問題とする。

命題2([3]). (i) X が algebraic の場合，H_X は有限巡回群。
(ii) X が non-algebraic の場合，H_X の各元は，無限位数である。

上の命題より有限群を問題にする限り X は algebraic と仮定してよい。

命題3([3]). $m_X := |H_X|$ とする。この時，$\varphi(m_X) \mid \operatorname{rank} T_X$，ここで $\varphi(\cdot)$ は Euler 関数を表わす。更に $\mathbb{Q}$ 上の表現 $H_X \longrightarrow O(T_X \otimes \mathbb{Q})$ は，巡回群 $\mathbb{Z}/m_X$ の $\mathbb{Q}$ 上の既約表現で，non-trivial な fixed vector をもたないものの直和と同型である。また，$H_X = \langle g \rangle$，ω_X を X 上の non-zero holomorphic 2-form とするとき，$g^*\omega_X = e_{m_X}\omega_X$，但し，$e_{m_X}$ は 1 の原始 m_X 乗根である。

系4([3]). $m_X \leqq 66$.

系4は $\operatorname{rank} T_X \leqq \operatorname{rank} H^2(X, \mathbb{Z}) - 1 = 22 - 1 = 21$ に注意すれば，命題3より従う。

定理. S_X が unimodular (i.e. $|\operatorname{discr} S_X| = 1$) と仮定する。この時，

(i) $m_X \mid 66, 44, 42, 36, 28$ or 12。

(ii) $m = 66, 44, 42, 36, 28$ or 12 とする。この時，$m_X = m$

を満たす algebraic K3曲面が同型を除いて一意的に存在する。

注意1. Vorontsov は、[10] の中で、上記定理の(i)及び、S_X が non-unimodular の場合の(i), (ii) にあたる結果を主張している。彼は、円分体 $\mathbb{Q}(m_X)$ の理論を用いている(証明は publish されていない)。

注意2. 上記定理(ii)においては、我々は具体的に K3 曲面を構成することで存在を証明している。また、S_X が non-unimodular の場合も、具体的構成を与えることができる。

§2. 例

(I) S_X が unimodular の場合.

以下、e_ν は 1 の原始 ν 乗根とする。

1°) $m_X = 66$

$$\begin{cases} X: \; y^2 = x^3 - u\prod_{i=1}^{11}(u - e_{11}^i) \\ g: (x, y, u) \longmapsto (e_{66}^2 x,\; e_{66}^3 y,\; e_{66}^6 u) \end{cases}$$

$\Delta = u^2\prod(u - e_{11}^i)^2$ とする。$\Delta = 0$ i.e. $u=0$, $u^{11}=1$ 上で. II型 singular fibre をもつ楕円曲面である。$u=\infty$ 上では、$\mathrm{ord}_{u=\infty}(\Delta) = \mathrm{order}_{u=\infty}\left(1/(1/u)^2 \cdot 1/(1/u)^{22} \cdot \prod(1 - e_{11}^i(1/u))^2\right) = -24 \equiv 0 \pmod{12}$ より. smooth fibre である。構成方法より、

$R^1(\mathcal{O}_X)=0$ であり、$c_2(X)=12\times e(\mathrm{II})=24$ で、X は K3 曲面 となる。但し、$e(T)$ は、T 型 singular fibre の topological Euler 数を表わす。fibre のコホモロジー類と section のコホモロジー類が S_X を生成し、その交点行列は $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ で与えられ S_X は、unimodular となる。以後、lattice $(\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix})$ を U と表わす。

2°) $m_X = 44$

$$\begin{cases} X: \ y^2 = x^3 + x + t^{11} \\ g: (x, y, t) \longmapsto (e_{44}^{22}x,\ e_{44}^{11}y,\ e_{44}^{2}t) \end{cases}$$

$t=\infty$ 上で II 型 singular fibre, $t^{22} = -\frac{4}{27}$ 上で I_1 型 singular fibre を持つ楕円 K3 曲面で S_X は section と fibre のコホモロジー類で生成される。

3°) $m_X = 42$

$$\begin{cases} X: \ y^2 = x^3 - u^5 \prod_{i=1}^{7}(u - e_7^i) \\ g: (x, y, u) \longmapsto (e_{42}^{10}x,\ e_{42}^{15}y,\ e_{42}^{6}z) \end{cases}$$

$u=0$ 上 II^* 型 singular fibre, $u^7=1$ 上 II 型の singular fibre をもつ楕円 K3 曲面で S_X は section, general fibre 及び II^* 型 singular fibre の components で生成され $S_X \cong U \oplus E_8$ となる。但し、E_8 は negative definite, rank=8, even, unimodular lattice で、交点行列は、E_8 型の Dynkin matrix である。

4°) $m_X = 36$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 - u^5 \cdot \prod_{i=1}^{6} (u - e_6^i) \\ g: (x, y, u) \longmapsto (e_{36}^2 x, e_{36}^3 y, e_{36}^{30} u) \end{cases}$$

$u=0$ 上 II^* 型 singular fibre, $u=\infty$, $u^6=1$ 上 II 型 singular fibre

をもつ楕円K3曲面で $S_X \cong U \oplus E_8$。

5°) $m_X = 28$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + x + t^7 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_{28}^{14} x, e_{28}^7 y, e_{28}^2 t) \end{cases}$$

$t=\infty$ 上 II^* 型 singular fibre, $t^{14} = -\frac{4}{27}$ 上 I_1 型 singular fibre

を持つ楕円K3曲面で $S_X \cong U \oplus E_8$。

6°) $m_X = 12$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 - u^5(u-1)(u+1) \\ g: (x, y, u) \mapsto (e_{12}^2 x, e_{12}^3 y, -u) \end{cases}$$

$u=0, \infty$ 上、II^* 型 singular fibre, $u=\pm 1$ 上 II 型 singular fibre

をもつ楕円K3曲面で $S_X \cong U \oplus E_8 \oplus E_8$。

注意　以上の楕円K3曲面はすべてsectionをもち、その Mordell-Weil rank は 0 である。更に、X 上の（非特異）有理曲線は、section (unique) と reducible singular fibre の component に限ることも示すことができる。

(II) S_X が non-unimodular の場合.

この場合、§3 で示すが、$m_X = 2^k$ $(1 \leq k \leq 4)$, 3^ℓ $(1 \leq \ell \leq 3)$, 5, 5^2, 7, 11, 13, 17, 19 が起り得る。

1°) $m_X = 19$

$$\begin{cases} X : y^2 = x^3 + t^7 x + 1 \\ g : (x, y, t) \longmapsto (e_{19}^7 x,\ e_{19} y,\ e_{19}^2 t) \end{cases}$$

$t = 0$ 上 II 型 singular fibre, $t = \infty$ 上 III 型 singular fibre, $t^{19} = (-\frac{4}{27})^{-1}$ 上で I_1 型 singular fibre をもつ楕円K3曲面で、その Mordell-Weil rank $= 1$, $\mathrm{rk} S_X = 4$。

2°) $m_X = 17$

$$\begin{cases} X : y^2 = x^3 + t^7 x + t^2 \\ \varphi : (x, y, t) \longrightarrow (e_{17}^7 x,\ e_{17}^2 y,\ e_{17}^2 t) \end{cases}$$

$t = 0$ 上 IV 型, $t = \infty$ 上 III 型, その他 17 個の I_1 型 singular fibre をもつ楕円K3曲面で Mordell-Weil rank $= 1$, $\mathrm{rk}\, S_X = 6$。

3°) $m_X = 13$

$$\begin{cases} X : y^2 = x^3 + t^5 x + t \\ g : (x, y, t) \longmapsto (e_{13}^5 x,\ e_{13} y,\ e_{13}^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 II 型, $t=\infty$ 上 III^* 型, その他 13個の I_1 型 singular fibre をもつ楕円K3曲面で、Mordell-Weil rank = 1, $\mathrm{rk}\, S_X = 10$。

3°)′ $m_X = 13$

$$\begin{cases} X : y^2 = x^3 + t x + t^8 \\ g : (x, y, t) \longmapsto (e_{13}^7 x,\ e_{13}^4 y,\ e_{13} t) \end{cases}$$

$t=0$ 上、III 型, $t=\infty$ 上 IV^* 型, その他 13個の I_1 型 singular fibre をもつ楕円K3曲面で、Mordell-Weil rank = 1, $\mathrm{rk}\, S_X = 10$。

4°) $m_X = 11$

$$\begin{cases} X : y^2 = x^3 + t^5 x + t^2 \\ g : (x, y, t) \longmapsto (e_{11}^5 x,\ e_{11}^2 y,\ e_{11}^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上, IV 型, $t=\infty$ 上 III^* 型, その他 11個の I_1 型 singular fibre をもつ楕円K3曲面で. Mordell-Weil rank = 1, $\mathrm{rk}\, S_X = 12$。

5°) $m_X = 7$ $\begin{cases} X : y^2 = x^3 + t^3 x + t^8 \\ g : (x, y, t) \longmapsto (e_7^3 x,\ e_7 y,\ e_7^2 t) \end{cases}$

$t=0$ 上 III^* 型, $t=\infty$ 上 IV^*, その他 7個の I_1 型 singular fibre

をもつ楕円K3曲面で Mordell-Weil rank $=1$, $\mathrm{rk}\,S_X = 16$。

6°) $m_X = 5$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^3 x + t^7 \\ g: (x, y, t) \longmapsto (e_5^3 x,\ e_5^2 y,\ e_5^2 t) \end{cases}$$

$t=0$ 上 III^* 型，$t=\infty$ 上 II^* 型，その他 5個の I_1 型 singular fibre をもつ楕円K3曲面で，Mordell-Weil rank $=1$, $\mathrm{rk}\,S_X = 1$。

7°) $m_X = 3^2$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + t^5 x + t^3 \\ g: (x, y, t) \mapsto (e_9^5 x,\ e_9^3 y,\ e_9^2 t) \end{cases}$$

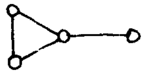
$t=0$ 上 I_0^* 型，$t=\infty$ 上 III^* 型，その他 9個の I_1 型 singular fibre をもつ楕円K3曲面で，Mordell-Weil rank $= 3$, $\mathrm{rk}\,S_X = 16$.

8°) $m_X = 3^3$

$$\begin{cases} X: y^2 = x^3 + u \prod_{\nu=1}^{9} (u - e_{27}^{3\nu}) \\ g: (x, y, u) \longmapsto (e_{27}^2 x,\ e_{27}^3 y,\ e_{27}^6 u) \end{cases}$$

$u=0$, $u^9=1$ 上で II 型 singular fibre, $u=\infty$ 上で IV 型 singular fibre を持つ楕円K3曲面で Mordell-Weil rank $=0$。g は到る所消えない X 上の holomorphic 2-form に 1の27乗根（原始）で作用しており、$\varphi(3^3) = 18$ より $\mathrm{rk}\,S_X = 22 - \mathrm{rk}\,T_X = 22 - 18 = 4$。更に、$S_X$ は、

楕円曲面の unique section と、IV型 singular fibre の component から生成されることがわかる。X 上の smooth rational curves のなす dual graph は次の通り：



この diagram の symmetry が $\mathbb{Z}/2$ であることから、g は S_X に、自明に作用することが解る。

9°) $m_X = 3$

$$\begin{cases} X: \ y^2 = x^3 - u^5(u-1)^5(u+1)^2 \\ g: \ (x, y, u) \longmapsto (e_3 x, y, u) \end{cases}$$

$u=0, 1$ 上で II^*型，$u=-1$ 上で IV型 singular fibre をもつ楕円K3曲面で unique section を持つ。

10°) $m_X = 5^2$

この場合、$\varphi(5^2) = 20$ で、$\mathrm{rk}\, S_X = 22 - \mathrm{rk}\, T_X = 2$。§3, 補題9 より S_X の discriminant group は、$\mathbb{Z}/5$ or $\mathbb{Z}/5^2$。ところが、indefinite symmetric bilinear form の reduction を用いることで $S_X \cong \left(\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\right)$ or $\left(\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\right)$ が解り、S_X が not represent zero (i.e. $\nexists\, c \in S_X$ with $c^2=0$) が直接確かめられる。従って、$m_X = 5^2$ の自己同型をもつK3曲面は楕円曲面の構造をもたない。この場合、$\mathbb{P}^2$ の分岐被覆として例を構成する。

$\mathbb{P}^2 \supset C := \{ x_0^6 + x_0 x_1^5 + x_1 x_2^5 = 0 \}$ とすると、C は非特異。

$g = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & e_{25}^5 & \\ & & e_{25}^4 \end{pmatrix}$ は、C を invariant にもつ transformation。

X を $\mathbb{P}^2$ の C で分岐する二重被覆とすると、X は K3 曲面で g の lifting が、求めるものである。

§3. Picard 群に自明に作用する自己同型

この節では、二次形式論，楕円曲面論を用いて、Picard 群に自明に作用する自己同型を分類する。前半(I)で S_X が、unimodular の場合を、後半(II)で S_X が non-unimodular の場合を扱う。

(I) S_X が unimodular の場合

<u>補題</u> 5. S_X : unimodular $\Longrightarrow$ $S_X \cong U$, $U \oplus E_8$ or $U \oplus E_8 \oplus E_8$, 但し $U = (\mathbb{Z}^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$, E_8 は negative definite unimodular lattice で交点行列は E_8 型 Dynkin matrix に対応するものとする。

<u>証明</u>. S_X が even (i.e. ${}^\forall x \in S_X$, $x^2 = \langle x, x \rangle \equiv 0 \pmod 2$), 且 indefinite (by Hodge index thm) に注意すると、[7] より従う。

<u>補題</u>6. S_X : unimodular $\Rightarrow \exists \pi : X \to \mathbb{P}^1$ elliptic pencil with a section s.t. π は II^*型 singular fibre だけを reducible singular fibre として持つ。

<u>証明</u>. 補題5より. S_X は represent zero。よって [6], §3, Cor. 3 より X は楕円曲面の構造をもち. S_X が U を component としてもつことから. この楕円曲面は section をもつことが解る。更に. fibre と section に直交する singular fibre の components に対応する交点行列が E_8 or $E_8 \oplus E_8$ であることから. reducible fibre は II^*型に限ることが従う。

§1で述べた定理は. より正確に次の形で述べられる:

<u>定理</u>7. (i) $S_X \cong U \Rightarrow m_X \mid 66, 44$ or 12。更に $\varphi(m_X) = \mathrm{rk}\, T_X = 20$ ならば $m_X = 66$ or 44。

(ii) $S_X \cong U \oplus E_8 \Rightarrow m_X \mid 42, 36$ or 28。

(iii) $S_X \cong U \oplus E_8 \oplus E_8 \Rightarrow m_X \mid 12$。

<u>証明</u>. (i), (ii), (iii) とも同様であるので、ここでは. 一番. 複雑な (i) の場合を証明する。

補題6の elliptic pencil を $\pi : X \to \mathbb{P}^1$ とする。この場合,

$S_x \cong U$ より、π の singular fibre はすべて既約で、I_1 型と II 型のみが現われる。今、r, Δ でそれぞれ I_1 型, II 型の singular fibre の個数を表わすと次が成り立つ：

$$24 = \text{Euler number of } X = \sum_{F:\text{ singular fibre}} \text{euler number of } F \, .$$

I_1 型, II 型の singular fibre の Euler 数はそれぞれ 1, 2 であるから

$$2\Delta + r = 24$$

を得る。Δ, r の可能性は次の通り：

Δ	12	Δ	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
r	0	r	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24

一方、$\varphi(m_x) \mid \operatorname{rank} T_x = 20$ より $5 \mid m_x$, $8 \mid m_x$ を示せば (i) の前半が証明される。

(A) $m_x \neq 25$: S_x に自明に作用する自己同型は section を保つから、fibre への作用は 6 or 4 の約数を位数にもつ。従って、$25 \mid m_x$ ならば section に order 25 で作用するが、上記表より、その様な作用は不可能。$\therefore$ m_x は 25 で割れない。

(B) $5 \mid m_x$ とする。$g \in H_x$ で $|g| = 5$ とすると、(A) と同様に、g は section に位数 5 で作用し、上記表より

$$(\Delta, r) = (12, 0), (7, 10) \text{ or } (2, 20)$$

しか起り得ない。いずれの場合も、g の固定点は II 型 singular fibre 上にある。従って fixed curve があれば、その Euler 数は正であることに注意し、Lefschetz fixed p.t. formula (cf. [9]) を適用すると

$$0 \leqq \#\,\text{isolated fixed p.ts.} + \text{fixed curves の Euler 数}$$

$$= \sum \operatorname{trace} g^*|H^i(X, \mathbb{Q}) = 2 + \operatorname{trace} g^*|S_X\otimes\mathbb{Q} + \operatorname{trace} g^*|T_X\otimes\mathbb{Q}$$

$$= 2 + 2 + \frac{(-20)}{4} = -1$$

となり矛盾を得る（最後の $\operatorname{trace} g^*|T_X\otimes\mathbb{Q} = -5$ は、$g^*|T_X\otimes\mathbb{Q}$ が $\mathbb{Z}/5$ の fixed vector をもたない $\mathbb{Q}$ 上の irred. representation の直和となることから従う）。

(C) $8 \mid m_X$ と仮定する。($g \in H_X$, $|g| = 8$ とする。) もし g が base に位数 2 で作用すると、g^2 は fibre に位数 4 の倍数で作用する。ところが、singular fibre は I_1 型, II 型だけであるので、この様なことは起らない。

よって、g は base に位数 8 または 4 で作用し、上記表より、$(\Delta, r) = (12, 0), (10, 4), (8, 8), (6, 12), (4, 16), (2, 20)$ or $(0, 24)$ が起り得る。

<u>Claim 1</u> g は base に位数 8 で作用できない。

∵ g が base に位数 8 で作用していると、$(r, \Delta) = (8, 8)$ or $(24, 0)$。g^4 は base に位数 2 で作用し、g^4 の invariant な 2つの fibre は、共に smooth elliptic curve。g^4 の fixed points はこの 2つの fibre 上にあり、(B) と同様に、Lefschetz fixed pts. formula より

$0 \leqq$ # isolated fixed points of g^4 + $\sum$ Euler number of fixed curves of g^4

$= 2 + 2 - 20 = -16$

で矛盾を得る。

よって, g は base に位数4で作用しているとしてよい。

(α) $(\Delta, r) = (12, 0), (8, 8), (4, 16), (0, 24)$ の場合. g が invariant に保つ2つの fibre は共に smooth elliptic curve である。g は non-zero holomorphic form に 1の原始8乗根で作用するので, g の section (base) 上の fixed pts. の tangent space への作用を考えることで, 上記の smooth elliptic curve には位数8で作用することになり矛盾を得る。

(β) $(\Delta, r) = (10, 4), (6, 12), (2, 20)$ の場合。$\iota = g^4$ とおくと. $\iota | S_X = 1_{S_X}$, $\iota | T_X = -1_{T_X}$。Nikulin の定理 ([4], Thm. 4.2.2.) より, ι の fixed pts set は

$$C + E \quad , \quad C \text{ は genus 10 の smooth curve}, \quad E \cong \mathbb{P}^1 \text{(section)}$$

である。g は base に位数4で作用しているから, $|g|C| = 4$ が従う。更に g の C 上の fixed points は g の invariant fibre との交点, すなわち, 2つの II 型 singular fibre と C との交点である。この II 型 singular fibre と E は一点で交わっているから C と II 型 singular fibre は 1点 (重複度をもつ) で交わらなければならない。

実際、そうでないとすると、このII型 singular fibre が、L の fixed curve になってしまう。以上から g の C 上の fixed points は丁度2個（g^2 の fixed pts も変らない）で、その ramification index は4であることが従う。C と g に Hurwitz の公式を適用すると

$$18 = 2g(C)-2 = 4(2g(C/\langle g\rangle)-2)+(4-1)\times 2$$

で矛盾を得る。

注意(i) $m_x = 66$ ならば $(A,r)=(12,0)$ である。実際、g は base に位数11の倍数で作用するが、上記表より、general fibre は位数3の自己同型（固定点をもつ）をもたねばならず、I_1型 singular fibre は現われない。

(ii) $m_x = 44$ ならば $(A,r)=(1,22)$ である。実際、general fibre は位数4の固定点をもつ自己同型をもたないから、上記表より、g は base に order 22 で作用し、$(A,r)=(1,22)$ or $(0,24)$ である。この場合、もし、$(A,r)=(0,24)$ ならば (β) と全く同様の議論で Hurwitz の公式より矛盾を導かれる。

また、$m_x = 42$ ならば $(A,r)=(7,0)$、$m_x = 36$ ならば $(A,r)=(7,0)$、$m_x = 28$ ならば $(A,r)=(0,14)$、$m_x=12$ ならば $(A,r)=(2,0)$ が成り立つ。

(II) S_X が non-unimodular の場合：

まず lattice についての準備をする。

M を lattice (i.e. non-degenerate symmetric bilinear form) とする。M が non-degenerate であることから、M から $M^* := \mathrm{Hom}(M, \mathbb{Z})$ への自然な map は単射となる。$A_M := M^*/M$ とおくと、A_M は finite abelian group になる。M が unimodular であることと、$A_M = \{1\}$ であることは同値となる。

S_X, T_X は unimodular lattice $H^2(X, \mathbb{Z})$ の sublattice で互いに直交していることから $A_{S_X} \cong A_{T_X}$ が従う。次の補題が成り立つ。

<u>補題</u>8. $g \in H_X$ とすると、g^* は A_{T_X} に自明に作用する。

<u>補題</u>9. ([10], Thm. 4) $A_{S_X} \neq \{1\}$, $m_X = |H_X|$ とする。

(i) $m_X = p^\ell$ for some prime p.

(ii) A_{S_X} は p-elementary abelian group.

<u>証明</u>. $p \mid m_X$ なる prime p を一つ固定する。$g \in H_X$ で $|g| = p$ なるものを選ぶ。$\forall x^* \in T_X^*$ に対し

$$x^* + g^*(x^*) + \cdots + (g^{p-1})^*(x^*)$$

は $T_X \otimes \mathbb{Q}$ の中の g^*-invariant vector。g^* は $T_X \otimes \mathbb{Q}$ 上、non-trivial な vector をもたないから（命題 3 参照）、

$x^* + g^*(x^*) + \cdots + (g^{p-1})^*(x^*) = 0$。他方，補題8より，$g^*$ は，A_{T_X} に自明に作用しているから，

$$x^* + g^*(x^*) + \cdots + (g^{p-1})^*(x^*) \equiv p x^* \mod T_X \text{。}$$

以上より

$$p x^* \equiv 0 \pmod{T_X} \text{。}$$

よって，A_{T_X} は p-elementary で $m_X = p^\ell$ となる。

<u>補題</u>10.（[10], Thm. 4 ）．$\ell(T_X)$ によって，A_{T_X} の minimal generator の個数を表わす。このとき

$$\ell(T_X) \leqq \frac{\mathrm{rank}\, T_X}{\varphi(m_X)}$$

が成り立つ。

<u>系</u>11. $A_{S_X} \cong A_{T_X} \neq \{1\} \Rightarrow m_X = 2^k\ (1 \leqq k \leqq 4),\ 3^\ell\ (1 \leqq \ell \leqq 3),\ 5,\ 5^2,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17$ or 19。

<u>証明</u>. 補題9，及び $\varphi(m_X) \mid \mathrm{rank}\, T_X$，$\mathrm{rank}\, T_X \leqq 21$ より，m_X は上のいずれかか，もしくは $m_X = 2^5$ が従う。$m_X = 2^5$ とすると，$\varphi(m_X) = 2^4$ より，$\mathrm{rank}\, T_X = 16$。補題10より，$\ell(T_X) = 1$。このとき，$\mathrm{rank}\, S_X = 6$，$\ell(S_X) = 1$，S_X: 2-elementary lattice (i.e. A_{S_X}: 2-elementary) である。これは，Nikulin の定理（[4], Thm. 4.3.2 ），$\mathrm{rank}\, S_X + \ell(S_X) \equiv 0 \pmod 2$ に反する。

§4. 一意性について

以下、S_X は unimodular と仮定する。このとき、$H^2(X,\mathbb{Z})$ は S_X と T_X の直和となる。まず次を示す。

<u>補題</u>12. X, Y を algebraic K3 surfaces で $|H_X|=|H_Y|=m$, 且 $\varphi(m)=\mathrm{rank}\, T_X\ (=\mathrm{rank}\, T_Y)$ とする。$H_X=\langle g\rangle$, $H_Y=\langle h\rangle$ とする。このとき、cup 積を保つ $\mathbb{Z}$-module の同型 $\psi: H^2(X,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H^2(Y,\mathbb{Z})$ で次を満たすものが存在する：

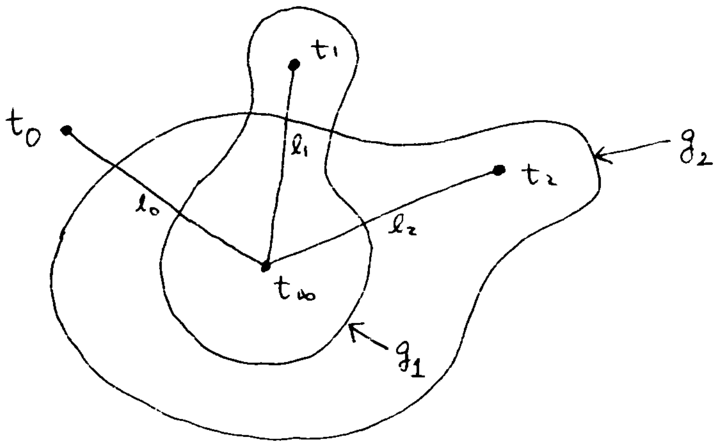
① $\psi(S_X)=S_Y$, $\psi(T_X)=T_Y$,

② ψ は effective divisor の class を保つ,

③ $\psi\circ g^* = h^*\circ\psi$.

<u>証明</u>. §3,(I) の最後の注意より、X, Y には、共に、同じ型の singular fibres をもつ楕円曲面の構造が入る。S_X, S_Y はそれぞれ、この elliptic pencil の section と singular fibre の components, 及び general fibre の class で生成されている。更に X, Y 上の非特異有理曲線は、これらに限られることも解り、②を満たす同型 $S_X \xrightarrow{\sim} S_Y$ が存在する。g, h の、この elliptic pencil への作用の仕方も解っているから、T_X, T_Y の base を、singular fibre の vanishing cycles を用いて記述すれば十分である。今、$S_X \cong U\oplus E_8\oplus E_8$, $T_X\cong U\oplus U$, $m_X=12$ の場合を、

証明する。$\pi : X \to \mathbb{P}^1$ を、上の elliptic pencil とし、t_0, t_∞ 上で II^* 型 singular fibres, t_1, t_2 上で II 型 singular fibres をもつとする。今、t_∞ から t_i への path l_i $(i=0,1,2)$ とし、下図の様な closed path g_i $(i=1,2)$ を考える:



今、π の general fibre F の $H^1(F, \mathbb{Z})$ の base を $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ とする。t_1, t_2 (resp. t_0, t_∞) の回りでの monodromy が $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\left(\text{resp. } \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ であることに注意すると g_1 に沿って γ_2 を動かすと closed 2-cycle ができる。これを G_1 で表わす。同様に、$(-g_1)$ に沿って γ_1 を、g_2 に沿って γ_2 を、$(-g_2)$ に沿って γ_1 を動かしてできる closed 2-cycles を、それぞれ、G_2, G_3, G_4 で表わす。但し $(-g_i)$ は g_i の逆向きである。$\{G_1, G_2, G_3, G_4\}$ の交点行列は

$$\left[\begin{array}{c|c} O & \begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix} & O \end{array}\right]$$

となり、これが T_X の base となる。

一意性の証明

補題12と同じ記号の下で考える。必要ならば、h^k を考え直すことで、g, h は non-zero holomorphic 2-forms ω_X, ω_Y にそれぞれ $e^{\frac{2\pi i}{12}}$ で作用しているとしてよい。ω_X, ω_Y が、g^*, h^* の固有 vector（一次元固有空間）であるから、$\varphi\otimes\mathbb{C}(\omega_X)=\lambda\omega_Y$, $\lambda\in\mathbb{C}^*$ が成り立つ。Torelli型定理より、φ は、同型写像 $Y \xrightarrow{\sim} X$ より引き起されている。

注意. S_X が non-unimodular の場合、§2, (II), 3°), 3'°) の様に、異なる singular fibre をもつ楕円曲面で、同じ位数の、自己同型をもつK3曲面が存在し、上の方法は直接、適用はできない。Vorontsov [10] の結果（§1, 注意1参照）を認めれば S_X が non-unimodular の場合も、§2の例に限ることが解る。

最後に、$m_X=66$ のK3曲面は、私の他に、independent に、Dolgachev氏、塩田徹治氏、斎藤恭司氏が、構成されていることを注意しておく。

参考文献

[1] K. Kodaira, On compact analytic surfaces, II–III, Ann. of Math., 77 (1963), 563–626 ; 78 (1963), 1–40.

[2] S. Kondō, On automorphisms of algebraic K3 surfaces which act trivially on Picard groups, Proc. Japan Acad. Vol. 62, Ser. A (1986), 356–359.

[3] V.V. Nikulin, Finite automorphism groups of Kähler surfaces of type K3, Proc. Moscow Math. Soc. 38 (1979), 75–137.

[4] V.V. Nikulin, On the quotient groups of the automorphism group of hyperbolic forms by the subgroups generated by 2-reflections, J. Soviet Math. 22 (1983), 1401–1476.

[5] S. Mukai, preprint (1985)

[6] I. Piatetskii-Shapiro, I.R. Shafarevich, A Torelli theorem for algebraic surfaces of type K3, Math. USSR-Izv. 35 (1971), 530–572.

[7] J.P. Serre, A course in arithmetics, Springer.

[8] K. Shiga, One attempt to the K3 modular function II, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Cl. Sci, (4), 8, no. 1, 157–182 (1981)

[9] K. Ueno, A remark on automorphisms of Enriques surfaces, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, vol. 23, no. 1 (1976), 149–165.

[10] S.P. Vorontsov, Automorphisms of even lattices that arise in connection with automorphisms of alg. K3 surfaces, Vestnik Mosk. Univ. Mathematika, 38, 19–21 (1983).